

Дейности при използване и построение на модели в началното обучение по математика

Владимира Ангелова

Actions when using and constructing Models in Primary education in mathematics

Vladimira Angelova

Резюме: В настоящата разработка представяме изследването си, свързано с изясняване приложението на моделирането в зависимост от степента на самостоятелност на учениците при дейности по построяване на модел и дейности при работа с построен модел. За тези две основни направления представяме практическа технология за цялостното им ефективно изпълнение в началното обучение по математика.

Abstract: In this paper we present our research, related to clarifying the application of modeling depending on the degree of students' independence in activities involving the construction of model and working with built model. For these two main areas we present a practical technology for their overall effective implementation in primary mathematics teaching.

Ключови думи: моделиране, модели, начално обучение по математика

Keywords: modeling, models, basic training in mathematics

Човекът може да конструира в съзнанието си образи, които нямат буквална прилика с конкретни реални обекти, но имат сходство с тях по някои признаци. Това свойство на съзнанието е тясно свързано с метода моделиране, който е един от методите на научното познание. Невъзможността от непосредствено изследване на определен обект поражда потребност от моделиране.

Чрез моделирането учениците опознават действителността. Този процес се осъществява чрез използване на модели.

В обучението по математика моделирането се използва главно при *дейности по построяване на модел и дейности при работа с построен модел*.

Целта на настоящата разработка е да представим изследването си, свързано с изясняване приложението на моделирането в зависимост от степента на самостоятелност на учениците при дейности по построяване на модел и дейности при работа с построен модел. За тези две основни направления представяме практическа технология за цялостното им ефективно изпълнение в началното обучение по математика.

При използването на модели в обучението по математика трябва да се има предвид характерът на урока, за да се предвиди нивото на самостоятелност при поставяне на задачите, свързани с дейностите при моделирането.

Ще разгледаме двете направления на работата с модели.

1. Дейности по построяване на модели

При реализирането на тези дейности може да се разграничат три равнища.

Първо равнище. Учителят съставя модела, запознава учениците с елементите и начина на изразяване на количествените отношения, отразени в него. Необходимо

е да използва съвременни дидактически средства. Добре е при възможност учениците да отразят модела в тетрадките си и да запишат решението на задачата.

Това ниво на моделиране се използва при даване на нови знания или при запознаване с нов вид модел.

Второ равнище. Моделът на задачата се съставя при фронтална работа чрез коментар с учениците. Чрез провеждане на беседа учителят ръководи учениците при съставянето на модела. При затруднения се задават насочващи въпроси. След изработването на модела, последният може да се отрази от учениците в тетрадките им.

Това ниво дава възможност за полусамостоятелна работа на учениците при изработване на модела. Може да се приложи в урок за нови знания, когато учебният материал е аналогичен на по-рано усвоен материал или при затвърдяване на знания и умения.

Трето равнище. Учениците сами конструират модела в тетрадките си, проявявайки творчество и възискателност при изпълнението му. Реализира се висока степен на самостоятелност при моделиране и се осъществява най-добре приноса на моделирането като учебна дейност за развитие на мисленето на учениците.

Използва се при затвърдяване, систематизиране, индивидуален контрол и проверка на знанията и уменията на учениците.

На базата на тези равнища ще конкретизираме дейностите по построяване на модели чрез *Примери 1., 2., 3., 4., 5.* и *6.* Началото на този процес трябва да се постави колкото се може по-рано като задължителен елемент от Учебната програма по математика за началния етап на образование, както и като необходимо условие от обучението в моделиране. Ефективното изпълнение на този етап изисква демонстриране на разнообразна палитра от модели. От една страна, е добре за дадена задача да се построят различни видове модели (*Примери 1. и 2.*). От друга страна, е полезно да се изисква конструирането на най-подходящия за типа задача модел (*Примери 3., 4., 5. и 6.*).

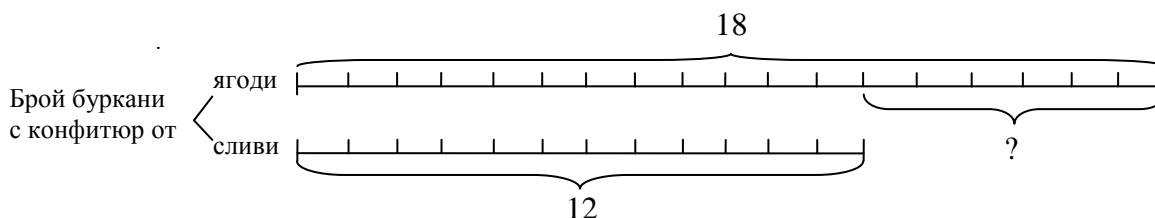
Пример 1. В един магазин има 18 буркана с конфитюр от ягоди и 12 буркана с конфитюр от сливи. С колко бурканите с конфитюр от ягоди са повече от тези със сливи?

Условието на задачата позволява съставянето на удобен сюжетен модел. Насочващите въпроси на учителя дават възможност да се открие от учениците, че бурканите могат да се подредят на два рафта (редици): на единия рафт да се поставят бурканите от единия вид, а на втория – бурканите от другия вид. Установява се коя от двете редици ще бъде по-дълга. Следва онагледяването с предметно-образен модел (Фиг. 1.).



Фиг. 1.

Преминава се към построяването на схематичен модел, осигуряващ осмисляне на математическата същност на ситуацията от задачата, но на по-високо ниво на обобщеност. Вместо да се рисуват рафтове и буркани, на учениците се изяснява, че за изобразяване на двете редици могат да се използват отсечки: първата – разделена на 18 равни отсечки, а втората – на 12 (съобразно условието на задачата). Така се построява следният схематичен модел (Фиг. 2.):

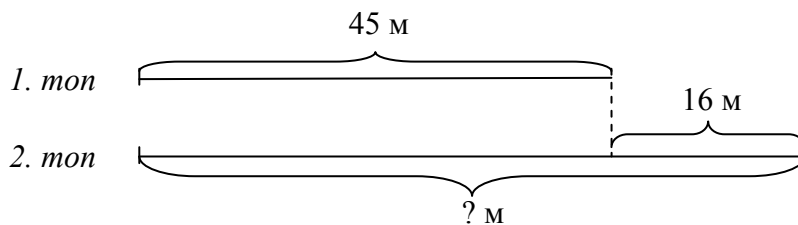


Фиг. 2.

При този модел липсва сюжетът на задачата. Запазила се е само математическата ѝ същност.

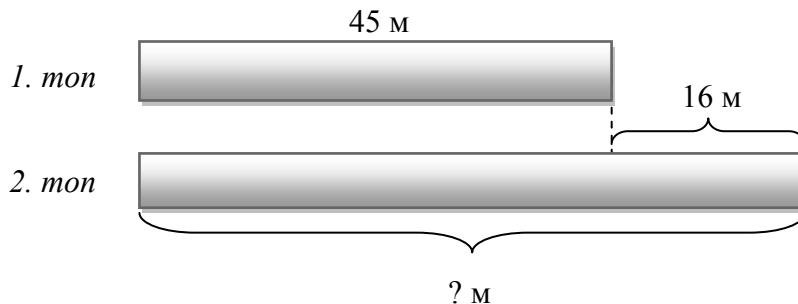
При схематичното моделиране много често количествата и отношенията между тях се изразяват с отсечки. Затова трябва учениците да се научат да изразяват количества чрез отсечки. Освен това важно е правилното отразяване на количествените отношения между дадените и търсените величини при построяването на модела. Необходимо е да се обърне вниманието на учениците, че за по-голямото количество се построява по-голяма отсечка. При това, след достатъчно натрупан опит от учениците, отсечките не се разграфяват. Разбира се, търси се съразмерност между дължините на отсечките, близка до изразяваните количествени характеристики на задачата, без да е задължително използването на някакъв мащаб. Това илюстрираме на Фиг. 3., където е представен модел на следващия пример.

Пример 2. В един топ има 45 м плат, а в друг – с 16 м повече. Колко метра плат има във втория топ?



Фиг. 3.

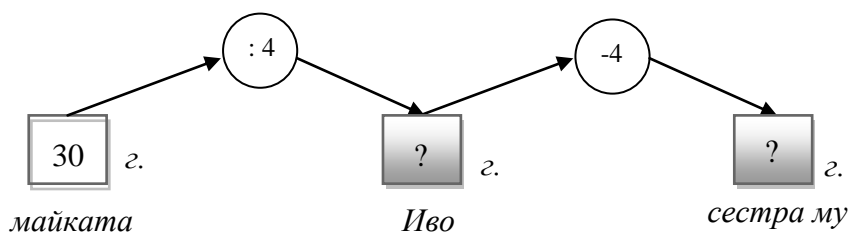
Естествено, добре е освен модели, съставени от отсечки, да се използват и други видове модели, например, съставени от правоъгълници. На Фиг. 4. показваме такъв модел за задачата от *Пример 2.*



Фиг. 4.

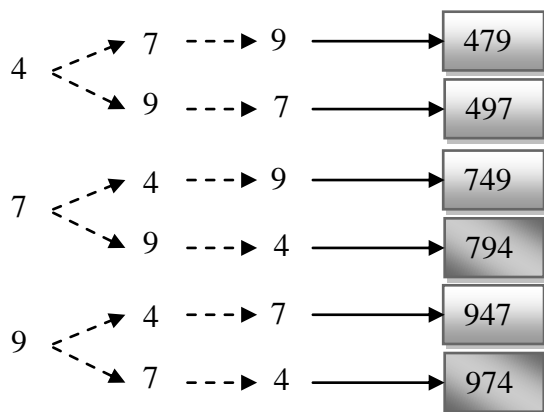
За някои задачи е подходящ моделът, който се построява с помощта на *графи*. Илюстрираме това при следващите два примера.

Пример 3. Майката на Иво е на 36 години. Иво е 4 пъти по-млад от майката си, а сестра му е с 4 години по-малка от него. На колко години е Иво? На колко години е сестра му?



Фиг. 5.

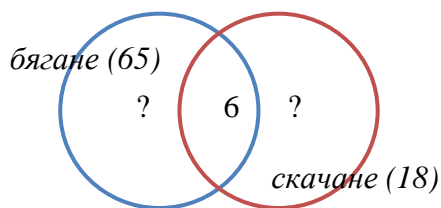
Пример 4. С помощта на цифрите 4, 7 и 9 запишете всички трицифрени числа, в които няма повтарящи се цифри.



Фиг. 6.

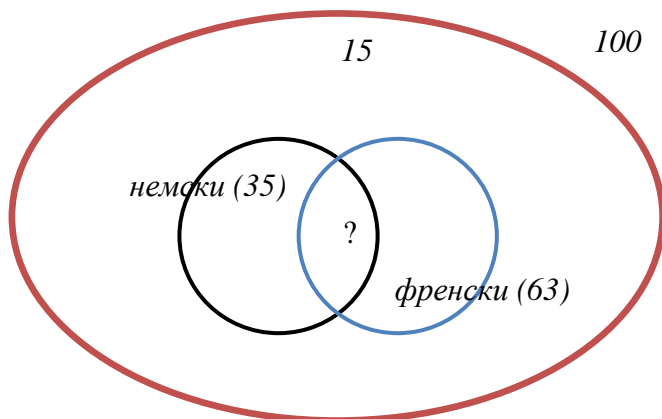
Следващите два примера ни убеждават, че за тях най-подходящ е моделът, за построяването на който се използват диаграмите на Ойлер-Вен (Фиг. 7. и Фиг. 8.)

Пример 5. В едно училище 65 ученици тренират бягане, а 18 – скачане. Шест от бегачите са и скачачи. Колко ученици тренират само бягане и само скачане?



Фиг. 7.

Пример 6. Група туристи от 100 души заминали за чужбина. Тридесет и пет туристи знаели немски, а 63 – френски език. Петнадесет от тях не знаели нито френски, нито немски език. Колко от туристите владеели и двата езика?



Фиг. 8.

2. Дейности при работа с построени модели

На учениците се предлага построен (готов) модел и им се поставят задачи, които ги насочват по пътя от модела към задачата. Работата с готови модели може да започне след като учениците вече са запознати с вида модел, неговите особености и самостоятелно са съставяли модели от този вид. Както при построяване на модел, така и при работа с построени модели, трябва да се спазват нивата на самостоятелност при работа на учениците, които са следните: готово поднесен анализ на построен модел при работа на учениците с него; коментирана колективна или самостоятелна работа с готов модел; напълно самостоятелна работа с готов модел.

Работата с готови модели може да бъде няколко вида: *установяване на съответствие между модел и текстова задача; съставяне на задачи по даден модел и откриване на нови връзки между даденото и търсеното при построен модел на дадена задача и нейното решение.*

2.1. Установяване на съответствие между модел и текстова задача

Вниманието на учениците се насочва към изработен модел (един или повече) и текстова задача. Изискването към учениците е да съпоставят модела с текстовата задача и да определят дали си съответстват.

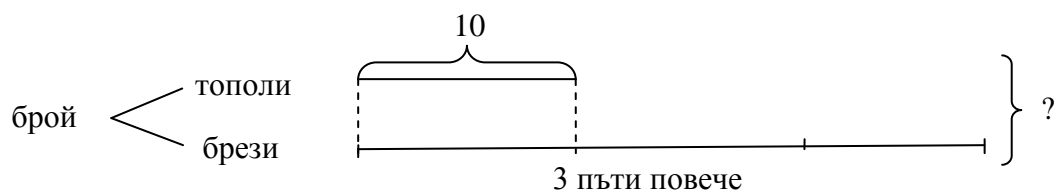
Съществуват няколко варианта за съотнасяне на модел към текстова задача:

- Моделът е в пълно съответствие със ситуацията, описана в задачата.
- Моделът не съответства напълно на задачата.
- От два или повече модела трябва да се избере този, който съответства на задачата.

Първи вариант: Моделът е в пълно съответствие със ситуацията, описана в задачата

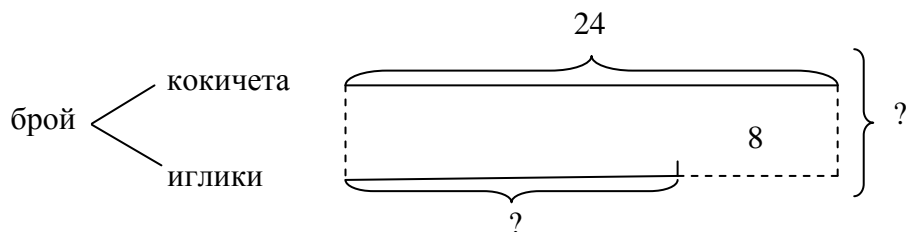
Следващите два примера показват това пълно съответствие. При *Пример 7* задачата е зададена в пряка форма, а при следващия (*Пример 8*) – в косвена форма. Техните модели са представени съответно на Фиг. 9. и Фиг. 10.

Пример 7. Ученици засадили 10 тополи и 3 пъти повече брезии. Всичко колко дървета са засадили учениците?



Фиг. 9.

Пример 8. В градинката на Лина цъфнали 24 кокичета, които са с 8 повече от цъфналите иглики. Колко иглики са цъфнали? Колко цветя всичко са цъфнали?



Фиг. 10.

Най-напред е необходимо учениците да разберат текста на задачата, след което погледът им се насочва към изучаване на построения модел и връзката му със

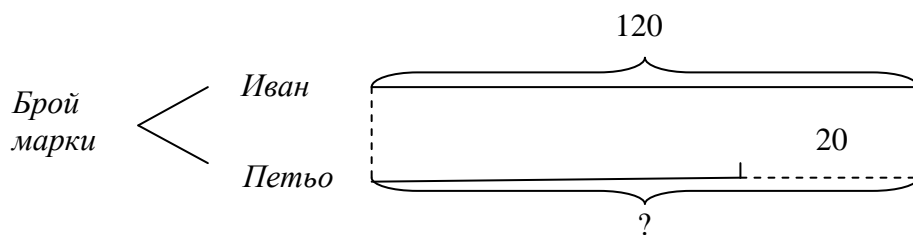
задачата. Чрез беседа откриват обектите, техните стойности и отношения в задачата и в модела. Съпоставянето им довежда до извода: Моделът съответства на задачата.

Втори вариант: Моделът не съответства напълно на задачата

На учениците се предлагат текстова задача и модел, по който има неточности. Най-често последните имат обучаващо значение и целят осъзнаване на връзки и отношения, важни за решаването на задачата. Неточностите в модела могат да бъдат една или повече, но е необходимо те да бъдат свързани със специфичните особености на задачата. От учениците се изисква да открият неточностите, да коригират модела, така че той да съответства на задачата.

Илюстрираме съществени несъответствия между задачата от *Пример 9.* и предложения модел на Фиг. 11. При модела са допуснати следните грешки: неправилно отразяване на релацията в задачата и погрешно поставен символ, съответстващ на въпроса ѝ.

Пример 9. Иван има 120 пощенски марки, които са с 20 по-малко от пощенските марки на Петьо. Колко марки общо имат двете момчета?



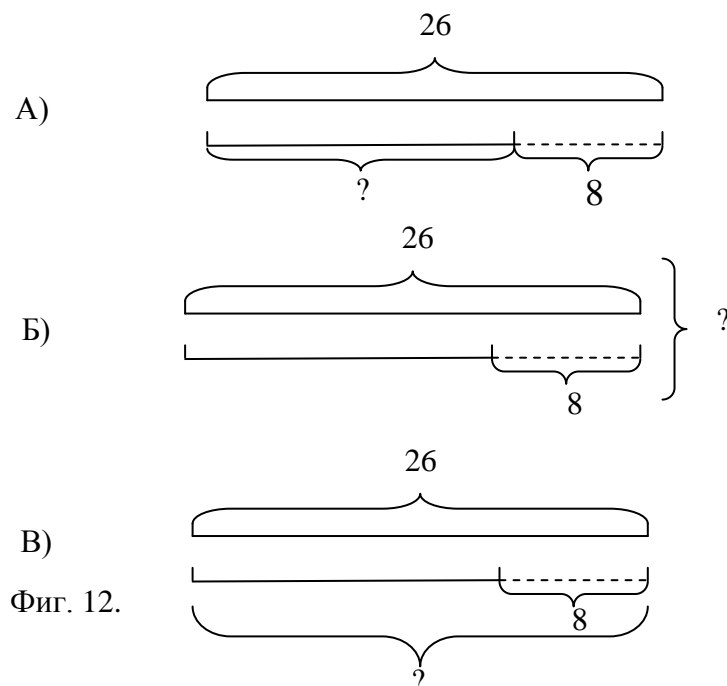
Фиг. 11.

Трети вариант: От два или повече модела трябва да се избере този, който съответства на задачата

Учениците се запознават с готовите модели и с текстовата задача. Подходящо е да се дадат различни варианти на несъответствие: пълно, непълно и без съответствие. Изборът на модела, който съответства на задачата, се обосновава от учениците. Този начин на работа с модели може да се комбинира с предходния, като се изисква от учениците да коригират неточностите в модела.

Пример 10. В една кошница има 26 ябълки и с 8 по-малко круши. Колко са плодовете в кошницата?

Разгледайте моделите А), Б) и В) от Фиг. 12. и открийте този, който съответства на текста на задачата. Обоснове се.



Фиг. 12.

Интересни и полезни за учениците са упражнения, при които се изисква от тях да сглобят отделни компоненти на задачите и получените задачи да съотнесат към схематичен и математически модел.

Пример 11. Свържете със стрелки отделните части на задачите. Помислете кой модел от Фиг. 13. за коя задача се отнася. Открийте и математическия модел ①, ② или ③ на всяка от задачите.

1. В училищен крос участвали 180 момичета.

През втория ден уловили с 45 кг по-малко.

Колко килограма риба са уловили през двата дни?

2. В една ферма имало 180 животни.

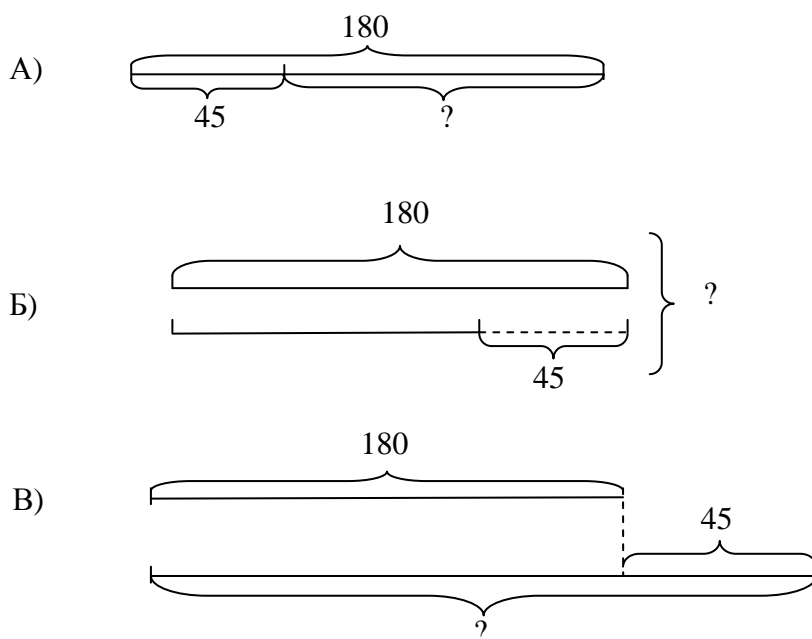
Те били с 45 по-малко от момчетата.

Колко животни са останали във фермата?

3. Рибари уловили през първия ден 180 кг риба.

Продали 45 от тях.

Колко момчета са участвали в кроса?



Фиг. 13.

① $180 + (180 - 45);$

② $180 - 45;$

③ $180 + 45.$

2.2. Съставяне на задачи по даден модел

Погледът на учениците се насочва към построен модел, който задължително се анализира. При анализа се обръща внимание на информацията за количествените характеристики на обектите, отразени чрез числа, на отсечките и мерните единици, използвани в модела. След анализа на модела, чрез колективна работа учениците предлагат различни варианти за съдържанието на текстовата задача, а при самостоятелна работа ученикът сам съставя текстова задача по модела.

Ще отбележим, че системата на работа започва от модели, въз основа на които се съставят прости текстови задачи, а след това се използват модели, довеждащи до формулиране на съставни текстови задачи. Добре е да се използват различни видове модели: материални (статични и динамични) и идеални (образни, знакови и мислени) модели. Необходимо е най-напред да се използват модели с по-ниско ниво на обобщеност (*Примери 12., 13.*) и постепенно да се преминава към модели с по-високо ниво на обобщеност и абстракция (*Примери 16., 18.* и др.).

Със следващите два примера илюстрираме предметно-образното моделиране.

Пример 12. Съставете задача по рисунката на Фиг. 14. и я решете.



Фиг. 14.

Пример 13. Съставете задачи по картината на Фиг. 15. и я решете:



Фиг.15.

По тази предметно-образна картина могат да се съставят различни текстови задачи. Например:

Ани купила цветя за 12 лв. и книга за 18 лв. Колко лева е дала за покупките?

За рождения ден на сестра си Ангел купил цветя за 12 лв. и книга за 18 лв. Колко лева е похарчил за покупката?

Решението на сюжетните задачи се свежда до един и същи математически модел: $12 + 18 = 30$ (лв.).

Ако са съставени задачи, при които се търси отношение между дадените числови данни, за решението им се получава математическият модел: $18 - 12 = 6$ (лв.). Например:

Мария купила цветя за 12 лв. и книга за 18 лв. С колко лева покупката за цветята е по-евтина от покупката за книгата? С колко лева книгата е по-скъпа от цветята?

Вариант на съставяне на задачи се получава по представен предметно-образен модел и даден математически модел.

Пример 14. Като използвате рисунката на Фиг. 16. съставете задача, която да се решава така: $3 \cdot 9 + 30 = \square$.

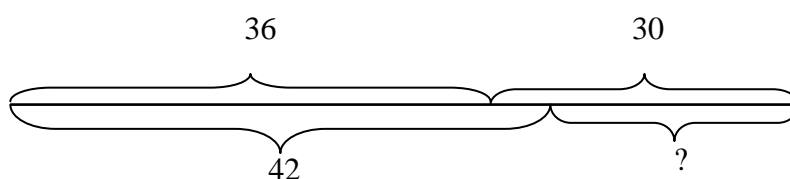


Фиг. 16.

При други упражнения може да е дадена част от условието на задачата и модел, отнесен към нея. Изисква се да се довърши текстът на задачата. Следващите три примера са от този вид.

Пример 15. В математическо състезание участвали 36 момичета и 30 момчета. За втори кръг се класирали 42 ученици.

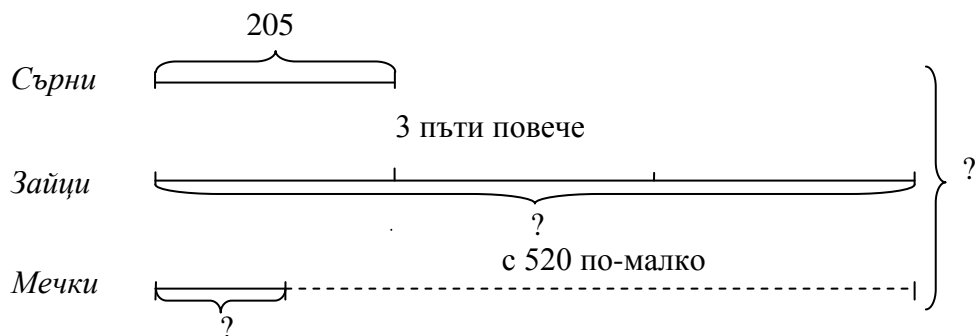
Поставете въпрос, така че получената задача да има моделът, представен на Фиг. 17. Решете задачата.



Фиг. 17.

Пример 16. В природен резерват живеят 205 сърни, 3 пъти повече зайци, и мечки – с 520 по-малко от зайците.

Поставете въпроси към текста, така че предложеният модел на Фиг. 18. да се отнася за получената задача. Решете задачата.



Фиг. 18.

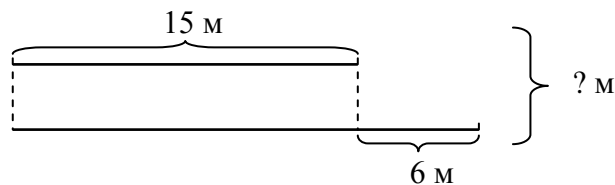
Пример 17. Никола купил 2 книги, всяка от които струва 7 лв. Продължете текста на задачата така, че да се решава с израза: $20 - 2 \cdot 7$.

Полезни са упражненията, при които е даден модел и от серия формулирани задачи да се определи тази, която се съотнася с модела. Следващите два примера илюстрират този вид упражнения: при единия е даден схематичен модел, а при другия – математически модел.

Пример 18. Коя от текстови задачи А), Б), В), Г) съответства на построенния модел на Фиг. 19.?

А) За да украсят стаята си момчетата направили гирлянд, дълъг 15 м, а момичетата – гирлянд, с 6 м по-дълъг. Колко метра гирлянд са направили момичетата?

Б) За да украсят стаята си учениците направили зелен гирлянд, дълъг 15 м, и жълт гирлянд, дълъг 6 м. Колко метра гирлянди са направили учениците?



Фиг. 19.

В) За да украсят стаята си учениците направили зелен гирлянд, дълъг 15 м, и жълт гирлянд, с 6 м по-дълъг от зеления. Колко метра гирлянди са направили учениците?

Г) За да украсят стаята си учениците направили зелен гирлянд, дълъг 15 м, и жълт гирлянд, с 6 м по-къс от зеления. Колко метра гирлянди са направили учениците?

Пример 19. Коя от текстови задачи ①, ②, ③, ④ се решава с числовия израз $4 + 4 \cdot 5$?

① Тошко има 4 червени топчета и 5 пъти повече сини топчета? С колко сините топчета са повече от червените?

② В езеро плуват 4 лебеда и 5 пъти повече патици. Колко са птиците в езерото?

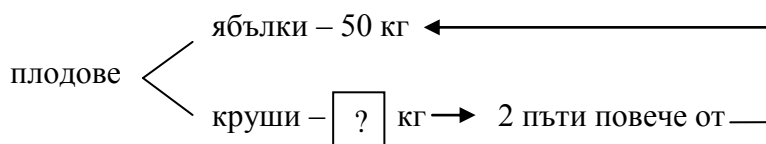
③ Георги се грижи за 4 сиви зайчета и 5 пъти повече бели зайчета. За колко бели зайчета се грижи Георги?

④ Ваня купила книжка за 5 лв. и торта, 4 пъти по-скъпа от книжката. Колко лева струва тортата?

В Учебните програми по математика за началния етап на средното училище се подчертава, че на учениците трябва да се даде възможност да записват съкратено текстова задача, т.е. да се прави модел на текста. Естествено се появява възможността за съставяне на текстова задача по нейния съкратен запис (Фиг. 20. и Фиг. 21.).

Съкратеният запис на задачата трябва да съдържа достатъчна информация за съставянето ѝ: обекти и количествени данни, които ги характеризират, релациите, които ги свързват, връзките между тях и др.

Пример 20. Съставете задача по схемата, представена на Фиг. 20.



Фиг. 20.

Пример 21. Съставете задача по схемата, представена на Фиг. 21.

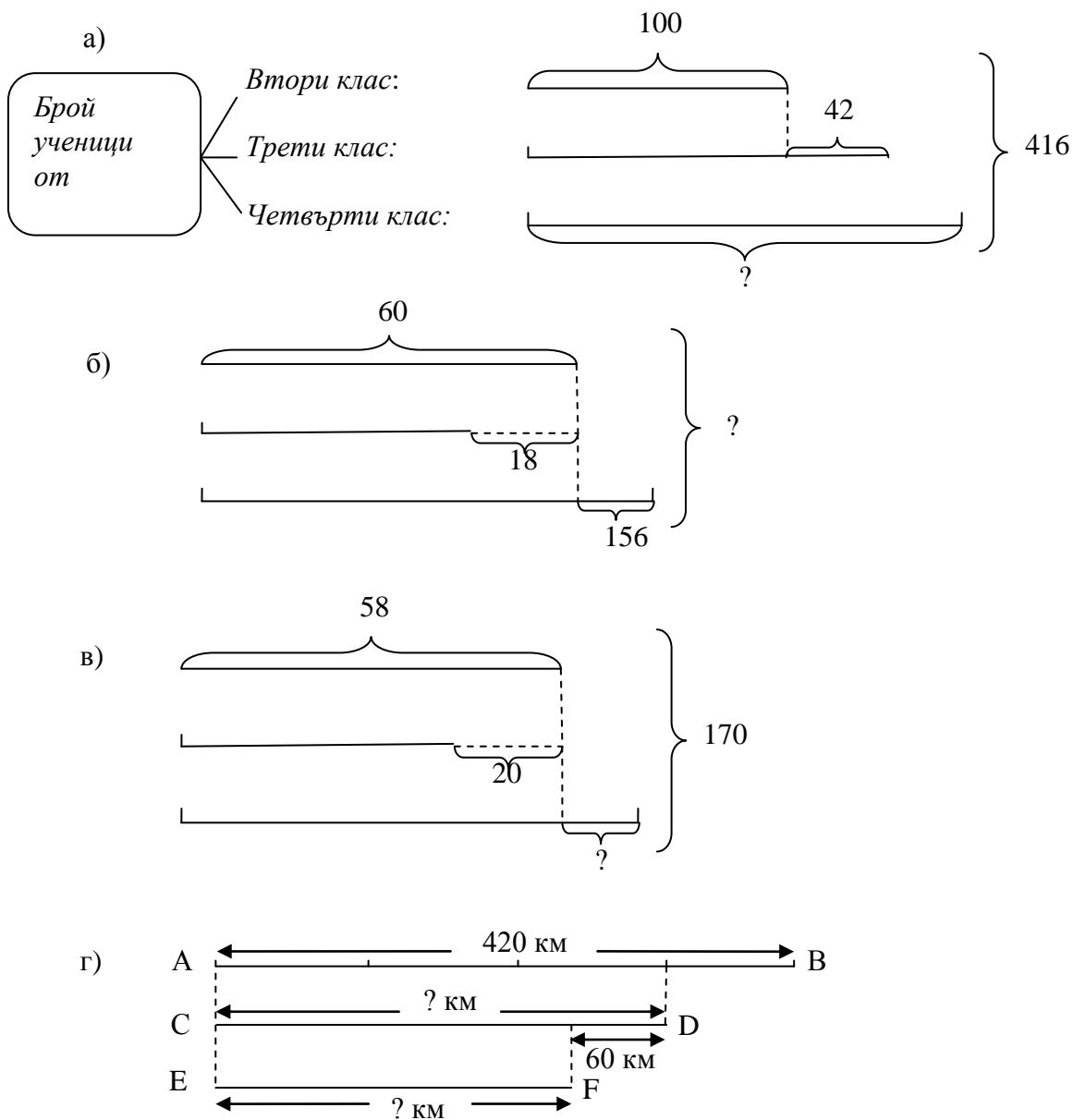


Фиг. 21.

Схематичните или математическите модели, по които могат да се съставят текстови задачи, са много разнообразни. От друга страна – по определен модел

могат да си съставят различни сюжетни задачи. При следващите два примера показваме някои идеи.

Пример 22. Съставете и решете задачи по моделите от Фиг. 22.



Фиг. 22.

По всеки от представените схематични модели могат да се съставят различни по сюжет задачи.

Пример 23. Съставете задача, която се решава чрез числовия израз: $100 - 2 \cdot 9$.

По този математически модел могат да се съставят различни сюжетни задачи.

Например:

В магазин имало 100 кг картофи. Петър и Христо купили по 9 кг. Колко килограма картофи са останали?

Милена имала 100 лв. Купила си 2 книжки, всяка от които струва 9 лв. Колко лева са ѝ останали?

В един топ имало 100 м плат. Отрязали от него за 2 рокли по 9 м. Колко метра плат са останали в тона?

Биляна имала панделка, дълга 100 см. От нея отрязала 2 пъти по 9 см. Колко сантиметра от панделката са останали?

В един цветарски магазин имало 100 карамфила. Сутринта продали на двама души по 9 карамфила. Колко карамфила са останали в магазина?

В един магазин получили 100 буркана с мед. Продали на 9 души по 2 буркана. Колко буркана с мед са останали в магазина?

В кошница имало 100 ореха. Дали на 2 деца по 9 ореха. Колко ореха са останали в кошницата?

Пример 24. Съставете задача с геометрично съдържание, която се решава чрез числовия израз: $2 \cdot (15 + 10)$.

Например: Намерете обиколката на правоъгълник, дължините на страните на който са 15 см и 10 см.

2.3. Откриване на нови връзки между даденото и търсеното

Това може да се осъществи само след като е построен моделът на дадената задача и тя е решена. Въпросите, които се използват за откриване на спомагателните нови връзки, обикновено са насочени към поставянето на допълнителни въпроси към задачата или към нейното преобразуване.

Въз основа на горното изложение може да се заключи, че използването на модели и моделиране допринася за развитие на мисленето на учениците и за тяхното интелектуално израстване.

Концепцията ни за моделирането, базирана на посочените дейности при използване и построение на модели в началното обучение по математика, детайлизирахме с конкретни примери. Демонстрирахме общи идеи и подходи, въз основа на които всеки педагог би могъл да изгради собствена система по отношение на разглежданата тема.

Литература:

1. Ганчев, И. Основни учебни дейности в урока по математика. С.: ИФ „Модул – 96“, 1999.
2. Милушев, В., Д. Френкев. Една трактовка на понятието модел и направления за използване в обучението по математика. – В: Математика и математическо образование, 2002.

Адрес за кореспонденция:
Гл. ас. д-р Владимира Стефанова Ангелова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“
Педагогически факултет, катедра „Начална училищна педагогика“
Бул. „България“ 236, гр. Пловдив, 4003, България
Mobile: +359 887 097 780
E-mail: vladiang@abv.bg