**Е-списание "Образование и развитие" ISSN 2603-3577**
**Брой 2, 07.2018 г.**

# МИКРОИКОНОМИЧЕСКИ МОДЕЛИ И ПРИЛАГАНЕТО ИМ В МАТЕМАТИЧЕСКИ ЗАДАЧИ

Росица В. Манева, Асен Х. Христов

СУ „Св. Климент Охридски“, Пловдив, бул. „Васил Априлов“ 5, rosvesman@abv.bg

ПУ „Паисий Хилендарски“, ФМИ, катедра „Алгебра и геометрия“,
Пловдив, бул. „България“ 236, asehri@uni-plovdiv.bg

***Резюме.*** *Обект на изучаване е една важна цел на математическото образование – формирането на способност за прилагане на инструментите на математическия апарат за решаване на практически проблеми. Разгледани са няколко начина на задаване на функциите на пазарно търсене и предлагане и са изследвани два подхода за намиране на стойностите, характеризиращи пазарното равновесие. Тези примери са полезна илюстрация на различни видове задачи от учебната програма по математика. Акцентирано е върху използването на графичния метод при решаването на такива задачи.*

***Ключови думи:*** *системи уравнения, графичен метод, микроикономически модели.*

# MICROECONOMIC MODELS AND THEIR APPLICATION IN MATHEMATICAL PROBLEMS

Rositsa V. Maneva, Asen H. Hristov

***Abstract.*** *The object of study is an important goal of mathematical education – the formation of the ability to apply the tools of the mathematical apparatus to solve practical problems. Several ways of defining market demand and supply functions have been considered and two approaches have been studied to find the values that characterize the market equilibrium. These examples are a useful illustration of different types of problems in the mathematics curriculum. An emphasis is placed on the use of the graphical method in solving such problems.*

***Keywords:*** *systems of equations, graphical method, microeconomic models.*

## 1. Въведение

Математиката винаги е била неотменна и важна част от човешката култура, от развитието на човечеството. Без използването на математиката съвременното общество би било немислимо. Учениците трябва да се убедят, че тя разкрива закономерностите и единството на света, че е полезна и свързана пряко с живота наука . Ето защо в съдържанието на учебния материал трябва да се включват по възможност повече актуални практически задачи от заобикалящата действителност, необходимо е по-често да се демонстрира приложния характер на математиката, да се показва значимостта и ролята ѝ за развитието на обществото. За целта е необходимо учениците да придобият умения за работа с математически модели, способности за анализиране на експериментални данни и изготвяне на прогнози, като овладеят математическия апарат, необходим за това.

Разбира се, с естественото развитие и еволюцията, учебното съдържание трябва да търпи промени, съобразени и продиктувани от изискванията на съвременното общество във всички сфери на технологично, икономическо, историческо, географско и социално развитие, за да може да се създава подготвено поколение, притежаващо качествата да продължи и развие постигнатото от предишните. Но само веднъж придобити знания и умения не са достатъчни. За да има прогрес, тези млади хора трябва да могат да се адаптират и справят в непрекъснато променящия се свят и дори да бъдат двигател на промените.

Така може да се изгради положително отношение на учениците към изучаване на учебното съдържание, да се създадат значителни предпоставки за трайно усвояване на математическите знания, да се формира и поддържа интереса към изучавания материал, което води до повишаване на мотивацията им за активна познавателна дейност.

Темата за мотивацията на учениците към обучението винаги е стояла на дневен ред пред хората, ангажирани с процесите на образованието като цяло, но е особено актуална в обучението по математика. Защото въпреки приложенията ѝ в почти всяка сфера на живота, в училище тя остава в рамките на една сложна и неразбираема абстрактна материя, в която учениците лесно губят интерес.

Основна цел на тази работа е да се представи възможност за повишаване интереса и мотивацията на учениците в обучението по математика чрез предоставяне на ресурси от икономиката и практиката за разкриване на полезността на науката и зараждането на основните математически понятия от чисто житейски проблеми и въпроси. Използвайки икономическа ситуация обучението по математика се насочва към повишаване нивото на фундаментална математическа подготовка на учениците с усилване на приложната им ориентация.

## 2. Моделиране на частично микроикономическо равновесие

Микроикономическите модели, подобно на макроикономическите, могат да служат за добра илюстрация на различни видове задачи от учебната програма по математика. Математическите изследвания и като следствие задачите с икономическо съдържание служат не само за количествени изчисления, но и за прецизно изследване на различни понятия и величини, за моделиране на икономически процеси, предвиждане на икономически състояния и събития с определена степен на сигурност, взимане на решения за икономическо развитие. Законите на търсене и предлагане са две от основните зависимости във всеки икономически анализ.

Нека да разгледаме пазара на една стока. Той се състои от две групи икономически агенти: потенциалните ѝ потребители и производители. Първите формират функцията на пазарно търсене на стоката, а вторите – на пазарното ѝ предлагане. Означаваме с $y = f(x)$ функцията на пазарно търсене, а с $y = g(x)$ – функцията на пазарно предлагане. И в двата случая става дума за количеството търсена (предлагана) стока $y$ в зависимост от цената $x$.

Трябва да си дадем сметка, че двете функции са монотонни – функцията на търсене е намаляваща, а функцията на предлагане – растяща. Това следва по икономически съображения, което се вижда от следното теоретико-множествено обяснение. Да разгледаме функцията на търсене. Нека е в сила неравенството $x_1 < x_2$. Ако с $U_1$ и $U_2$ означим съответните множества на търсене за тези цени, то е изпълнено влагането $U_1 \supset U_2$. Това е така, защото всички, които търсят стоката при по-високата цена $x_2$, биха се радвали да

я закупят на по-ниската цена $x_1$. От включването $U_1 \supset U_2$ следва неравенството $|U_1| > |U_2|$, където с $|U_i|$ сме означили мощността на множеството $U_i$. Тогава, тъй като е в сила $f(x_i) = |U_i|$, то имаме $f(x_1) > f(x_2)$. Така зависимостта $y = f(x)$ означава обема на пазарно търсене при цена не по-ниска от $x$, а функцията $y = g(x)$ – обема на пазарно предлагане при цена не по-висока от $x$. Следователно монотонните функции на търсене и на предлагане притежават обратни функции.

Икономическите функции на търсене и на предлагане имат една важна особеност, отличаваща ги от математическите функции, които се записват по същия начин – променливите величини $x$ и $y$ трябва да са едновременно неотрицателни. Следователно от икономическа гледна точка трябва да се интересуваме само от тази част на графиките на тези функции, която е разположена в първи квадрант на координатната система.

**Пример.** Нека разгледаме дробно-линейната функция

(1) $$y = f(x) = \frac{6-3x}{x+2},$$

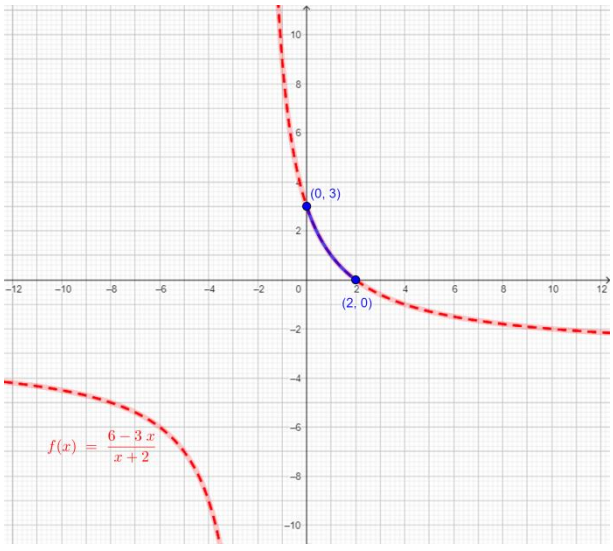
чиято графика е изобразена на Фиг. 1.

За всички неотрицателни стойности на $x$ знаменателят е неотрицателен, но числителят е неотрицателен за $x \leq 2$. Тъй като обратната функция е

(2) $$x = \frac{6-2y}{y+3},$$

то $x$ е неотрицателно при $y \leq 3$. Окончателно областите на допустими стойности за тази икономическа функция са $x \in [0;2]$ и $y \in [0;3]$. Тъй като имаме $f(0) = 3$ и $f(2) = 0$, то функцията е намаляваща и следователно може да служи за моделиране на пазарно търсене.

Даваме си сметка, че съответната математическа функция има много по-широки интервали на допустими стойности: $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$ и $y \in (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty)$, което следва директно от (1) и (2).




**Фигура 1.**

Особено важни за интерпретацията на функциите на пазарно търсене и на пазарно предлагане са мащабите на измерване на количеството и цената. Така например, ако за функция (1) цената $x$ се измерва в левове за тон, а количеството $y$ – в тонове и искаме

да преминем към стотинки за килограм и килограми съответно, то видът на функцията би бил следния

(3) $y = 1000\frac{600-3x}{x+200}$.

Очевидно, двете функции на търсене и на предлагане трябва да са мащабирани по един и същ начин.

Ако цената на определена стока е много висока, то потребителите няма да я купят. При положение, че цената е много ниска производителите няма да я продадат. На един свободен пазар, когато цената на единична стока зависи само от количеството на търсене и предлагане, тогава има винаги тенденция цената да се приспособява така, че количеството търсено от потребителите да се изравнява с количеството, което производителите са склонни да предложат.

Под частично микроикономическо равновесие се разбира изравняването на количествата на търсене и на предлагане. Тогава равновесието поражда две равновесни стойности: равновесно количество $y_0$ и равновесна цена $x_0$, така че да бъдат изпълнени равенствата

(4) $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$.

Ясно е, че моделирането на частичното микроикономическо равновесие се състои от съставяне и решаване на система от две уравнения с две неизвестни.

Геометрично равновесното състояние съответства на точката $E(x_0; y_0)$ на пресичане на графиките на функциите на търсене и на предлагане.

Нека множествата от допустимите стойности за функциите на търсене и на предлагане са съответно интервалите $[0; x_1]$ и $[x_2; +\infty)$. Ако е изпълнено неравенството $x_1 > x_2$, то съществува пазарно равновесие. Поради монотонността на двете функции, това равновесие е единствено.

Според начините на задаване на функциите на търсене и на предлагане, получаваме следните случаи на системи уравнения:

- и двете функции са зададени като прави или обратни функции;
- едната от функциите е права, а другата – обратна;
- едната функция е зададена в неявен вид, а другата – права или обратна;
- и двете функции са зададени в неявен вид.

За намиране на стойностите, характеризиращи пазарното равновесие (ако то съществува), са възможни два подхода:

- намиране на всички двойки $(x; y)$, които са решения на съответната система, и отхвърляне на отрицателните решения;
- предварително намиране на сечението на допустимите стойности за $x$ (или $y$) за двете уравнения.

Вторият начин е за предпочитане, защото:

- би ни избавил от ненужните пресмятания в случай на несъществуващо равновесие – тогава сечението е празно множество.
- теоретико-множественият подход, използван при решаването на алгебрични задачи, по принцип е глобален, а пресмятанията са локални.

По принцип, заниманията с алгебра (поради доминирането в тях на пресмятания и преобразуване на изрази) развиват лявото мозъчно полукълбо, така че трябва да се търсят глобални подходи (теоретико-множествен, логически, алгоритмичен), развиващи дясното полукълбо. В този ред на мисли би следвало да се разглеждат и геометричните методи в алгебрата – използване на графики и чертежи.

**Основна задача.** Намерете равновесните цена и количество за следните функции на търсене и на предлагане:

| | ***Функция на търсене*** | ***Функция на предлагане*** |
|---|---|---|
| а) | $y = -\frac{1}{2} + \frac{42}{x}$ | $y = \frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{x}}$ |
| б) | $y = \frac{25}{2x} - \frac{5}{2}$ | $x = \frac{y}{3{,}5-y}$ |
| в) | $y = \frac{6-3x}{x+2}$ | $y = \frac{4x-10}{x+1}$ |
| г) | $x^2 + 2y^2 = 81$ | $x - y = 3$ |
| д) | $x = \frac{36}{(y+0{,}5)^2}$ | $x = \frac{13{,}5}{1{,}5-y}$ |

**Решение.** а) Областите от допустими стойности за $x$ са: за функцията на търсене $x \in [0; 84]$, а за функцията на предлагане $x \in \left[\frac{100}{9}; \infty\right)$. Сечението на двете области е $x \in \left[\frac{100}{9}; 84\right]$. Приравнявайки функциите на търсене и предлагане получаваме системата

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + \frac{42}{x} \\ y = \frac{3}{2} - \frac{5}{\sqrt{x}} \end{cases}.$$

Умножаваме двете страни на второто равенство с $x$ и получаваме уравнението

$$2x - 5\sqrt{x} - 42 = 0.$$

След полагането $\sqrt{x} = z$ горното уравнение се превръща в следното квадратно уравнение: $2z^2 - 5z - 42 = 0$ с положителен корен $z = 6$. Оттук получаваме $x = 36$ и след заместване (например) във функцията на търсене намираме $y = \frac{2}{3}$. Следователно за дадените функции на търсене и на предлагане равновесната цена е 36, а равновесното количество е $\frac{2}{3}$.

Задачата може да бъде решена и графично, построявайки графиките на функциите на търсене и на предлагане (Фиг. 2). Пресечната точка *E* на тези криви е точката на равновесие. Да не забравяме, че от икономическа гледна точка се интересуваме само от тези части от кривите, които са разположени в първи квадрант.

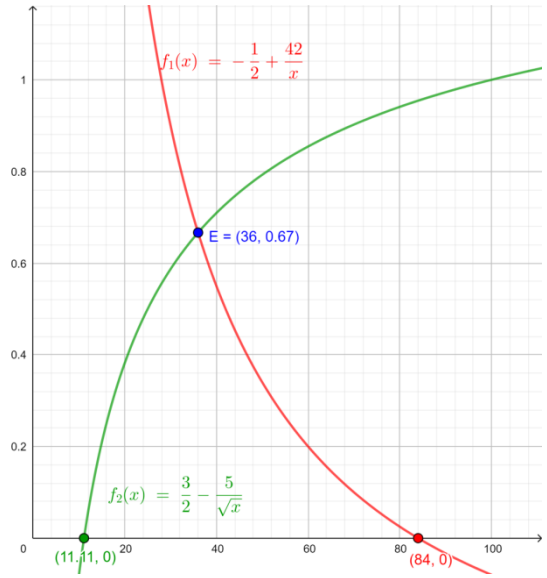
б) Ако заместим $x$ от функцията на предлагане в израза за функцията на търсене, получаваме уравнението

$$y = \frac{25(3{,}5-y)}{2y} - \frac{5}{2}.$$

След опростяване този израз е еквивалентен на квадратното уравнение

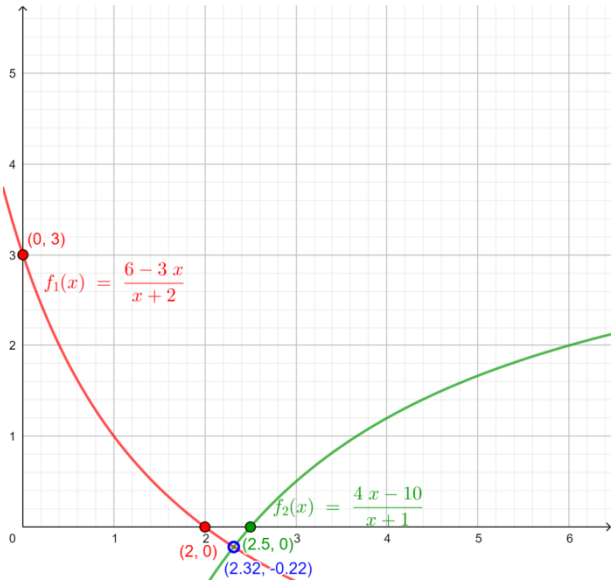
$$4y^2 + 60y - 175 = 0$$

с положителен корен $y = \frac{5}{2}$. Заместваме в обратната функция на предлагане и намираме $x = \frac{5}{2}$. Следователно за дадените функции на търсене и на предлагане равновесната цена и равновесното количество са съответно равни на $\frac{5}{2}$. Равновесното състояние съответства геометрично на точката $E\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$, която е пресечната точка на графиките на функциите на търсене и на предлагане (Фиг. 3).

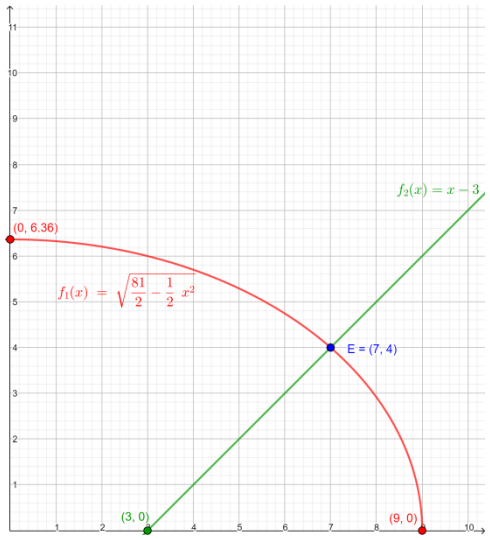



**Фигура 2.**

**Фигура 3.**




**Фигура 4.**



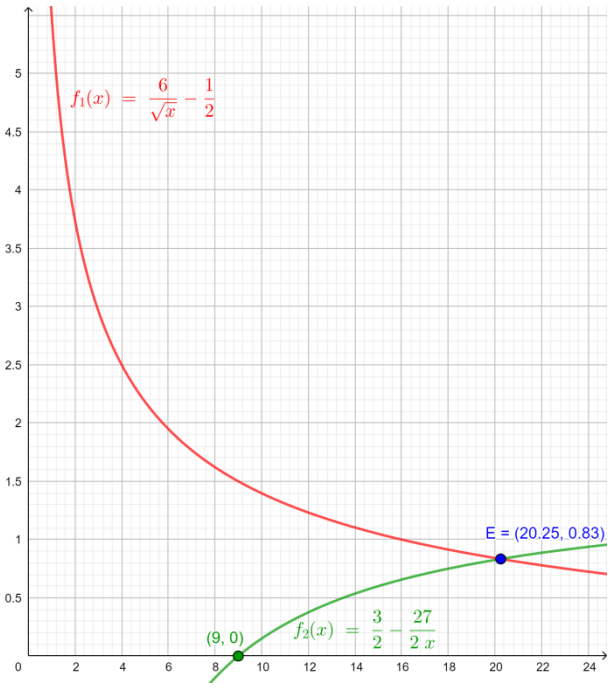

**Фигура 5.**

в) В разглеждания пример множествата от допустимите стойности за функциите на търсене и на предлагане са съответно интервалите $[0;2]$ и $[2{,}5;+\infty)$. Сечението на тези два интервала е празното множество. Тогава получаваме, че не съществува пазарно равновесие.

Ако използваме геометричния подход в този случай, то се вижда, че графиките на съответните математически функции имат пресечна точка (Фиг. 4). Обаче тази точка не от-

говаря на изискванията от икономическа гледна точка за положителност на координатите и следователно не е решение на задачата.

г) Областта на допустимите стойности на $x$ за функцията на търсене е $[0;9]$, а за функцията на предлагане получаваме $[3;+\infty)$. Сечението на двата интервала е $[3;9]$. От приравняването на двете функции следва квадратното уравнение $x^2-4x-21=0$ с положителен корен $x=7$, който принадлежи на $[3;9]$. За равновесното количество получаваме $y=4$. В този случай точката на пазарно равновесие е $E(7;4)$ (Фиг. 5).




**Фигура 6.**

д) Областта на допустими стойности на функцията на търсене $y$ е $[0;+\infty)$, а за функцията на предлагане получаваме $y\in[0;1{,}5)$. Тогава сечението на двете области е втория интервал. След елементарни преобразувания на системата

$$\begin{cases} x=\frac{36}{(y+0{,}5)^2} \\ x=\frac{13{,}5}{1{,}5-y} \end{cases}$$

се получава квадратното уравнение $12y^2+44y-45=0$ с положителен корен $y=\frac{5}{6}$. Като заместим получената стойност за $y$ в обратната функция на предлагане, намираме $x=\frac{81}{4}$. В този случай точката на пазарно равновесие е $E\left(\frac{81}{4};\frac{5}{6}\right)$ (Фиг. 6).

## 3. Заключение

Една от основните цели на образованието е да подготви младите хора да бъдат конкурентно способни личности в съвременното общество чрез придобиване на знания и опит, необходими за справяне с бъдещи житейски ситуации.

Разгледаните примери позволяват на учениците в процеса на обучение да откриват за себе си важни математически факти, да формират способност за прилагане на инструментите на математическия апарат за решаване на практически проблеми, да развиват

стремеж към разширяване и задълбочаване на знанията, към усъвършенстване на уменията.

В този нов свят образованието трябва да създава нова, творческа, интересна и значима за ученика атмосфера, която да е основана на себепознанието и постоянното образоване на личността.

Математиката е отражение на заобикалящия ни свят. Възникнала е от необходимостта за решаване на конкретни житейски проблеми, развила се е в хода на еволюцията до абстрактни модели и се „връща“ отново, за да помогне за усъвършенстване живота на съвременното и бъдещото общество.

**Литература**

Божович, Л. (2008). *Личность и её формирование в детском возрасте.* Санкт Петербург: Питер.

Гюрова, В. (2014). Управление на нагласите и мотивацията на учениците за учене. *Педагогика*, 86, 328-341, ISSN 0861-3982.

Ильин, Е. (2011). *Мотивация и мотивы*. Санкт Петербург: Питер.

Манев, Х. и Енков, С. (2012). Интерактивно обучение по Теория на графите. В: Сборник на V Научна конференция „Образованието в информационното общество“. Пловдив: Асоциация „Развитие на информационното общество“, 41-49.

Манева, Г. (2016). Приложения на невролингвистичното програмиране в социално-педагогическото консултиране в училището. В: Детето и съвременният свят. Сборник доклади от студентски научен форум. Пловдив: Университетско издателство „Паисий Хилендарски“, 40-48.

Манева, Г. (2018). Същност и място на консултирането в социално-педагогическата работа в училищна среда. *Докторантски изследвания. Научно списание за докторанти на Педагогическия факултет на Пловдивския университет* „*Паисий Хилендарски*“, Университетско издателство *„Паисий Хилендарски“* (под печат).

Мелило, Р. (2017). *Откъснати деца*. София: Кибеа.

Неминска, Р. (2015). *Повишаване на мотивацията за учене. Фактори и мотивационни модели*, София: РААБЕ България ООД.

Павлов, Н., Рахнев, А., Кюркчиев, В., Малинова, А. и Ангелова, Е. (2016). Визуализация на географски карти в DisPeL. В: Сборник доклади от Научна конференция „Иновационни ИКТ в бизнеса и обучението: Тенденции, приложения и разработване“. Пампорово, 13-20.

Рахнев, А., Ангелова, Е., Старибратов, И., Терзиева, Т. и Карабов, А. (2017). Тестология чрез DisPeL. В: Научна конференция „Иновационни софтуерни инструменти и технологии с приложения в научни изследвания по математика, информатика и педагогика на обучението“. Пампорово, 129-138.

Рахнев, А., Малинова, А. и Павлов, Н. (2014). Параметризирано изпитване в DisPeL. В: Сборник доклади на International Conference “From DeLC to VelSpace”. Пловдив: Third Millennium Media Publications, 263-272.

Смит, А. (2000). *Математическо въведение в икономиката*. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски“.

Христов, А. (2016). Математика в микроикономиката. [онлайн] Наличен на: http://web.uni-plovdiv.bg/asehri/MAT_MIKRO/ [Посетен на 11 окт. 2017].

Христов, А. (2016). Математически основи на микроикономиката. [онлайн] Наличен на: http://web.uni-plovdiv.bg/asehri/MIKROIKONOMIKA/ [Посетен на 10 дек. 2017].

ECSO, (2016). Задачи по микроэкономике. [онлайн] Наличен на: http://ecson.ru/economics/category/microeconomics/ [Посетен на 20 апр. 2016].

Malinova A., Rahneva, O. and Golev, A. (2016). Automatic Generation of English Language Test Questions on Parts of Speech. *International Journal of Pure and Applied Mathematics,* 111(3), pp. 525-534.

Manev, H. and Golev, A. (2014). Electronic Textbook “Geometry for Students in Informatics” with DisPeL. In: Proceedings of the International Conference “From DeLC to Velspace”. Plovdiv: Third Millennium Media Publications, 191-198.

Rahnev A., Pavlov N. and Kyurkchiev V. (2014). Distributed Platform for e-Learning – DisPeL. *European International Journal of Science and Technology*, 3(1), pp. 95–109.

Rahnev A., Pavlov N., Golev, A., Stieger, M. and Gardjeva T. (2014). New Electronic Education Services Using the Distributed e-Learning Platform (DisPeL). *International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(2), pp. 63-72.